Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ
Phần C: Khoa học Xã hội, Nhân văn và Giáo dục
website: sj.ctu.edu.vn

DOI:10.22144/ctu.jvn.2017.087

DẠY VÀ HỌC ĐỊNH NGHĨA CHÍNH XÁC VỀ GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ THÔNG QUA QUÁ TRÌNH MÔ HÌNH HÓA TOÁN HỌC

Lê Thái Bảo Thiên Trung[1] và Phạm Hoài Trung[2]
[1]*Khoa Toán - Tin Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh*
[2]*Lớp Cao học Lý luận và Phương pháp dạy học bộ môn Toán khóa 4, Trường Đại học Đồng Tháp*

Thông tin chung:
Ngày nhận bài: 20/12/2016
Ngày nhận bài sửa: 17/03/2017
Ngày duyệt đăng: 31/08/2017

Title:
Teaching and learning the precise definition of limit of a function through the process of the mathematical modeling

Từ khóa:
Mô hình hóa, giới hạn, xấp xỉ x, xấp xỉ $f(x)$

Keywords:
Modeling, limit, approximate x, approximate $f(x)$

ABSTRACT

The article mentioned teaching the precise definition of a limit from a particular case. Next, some teaching and learning activities have been built to reduce the difficulties of students when they learn about that abstract definition through the process of the mathematical modeling. From that, students will have a profound understanding of the connection between the concept of the limit and reality.

TÓM TẮT

Bài báo đề cập đến việc dạy học định nghĩa chính xác về khái niệm giới hạn từ một trường hợp cụ thể. Tiếp theo, một số hoạt động dạy và học đã được xây dựng với mục đích giảm bớt những khó khăn cho học sinh khi họ lĩnh hội khái niệm trừu tượng này thông qua quá trình mô hình hóa toán học. Qua đó, học sinh sẽ có được hiểu biết sâu sắc hơn về mối liên hệ giữa khái niệm giới hạn và thực tiễn.

Trích dẫn: Lê Thái Bảo Thiên Trung và Phạm Hoài Trung, 2017. Dạy và học định nghĩa chính xác về giới hạn của hàm số thông qua quá trình mô hình hóa toán học. Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ. 51c: 1-6.

1 ĐẶT VẤN ĐỀ

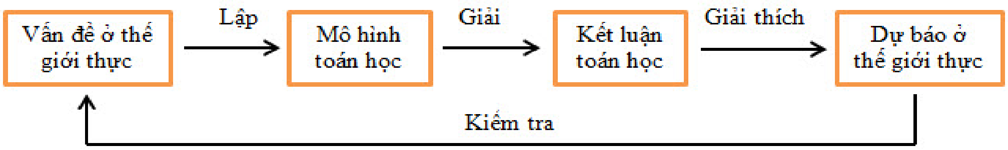
Trong quá trình dạy học toán, điều quan trọng là làm thế nào giúp học sinh (HS) hiểu rõ hơn khái niệm, nhận biết được sự thể hiện của khái niệm đó trong thực tế. Bởi lẽ, khái niệm là nền tảng của toàn bộ kiến thức toán học, là tiền đề để hình thành khả năng vận dụng hiệu quả các kiến thức đã học vào giải quyết các vấn đề trong nội bộ toán, các tình huống thực tế; đồng thời góp phần phát triển năng lực trí tuệ cho HS. Khái niệm toán học ở bậc phổ thông dù có trừu tượng nhưng vẫn có thể tìm thấy sự thể hiện của chúng trong thực tiễn và khái niệm giới hạn cũng không phải là một ngoại lệ. Khái niệm giới hạn đã được định nghĩa theo hai quan điểm, trong đó định nghĩa bằng ngôn ngữ ε,δ đã biến mất trong các sách giáo khoa hiện hành với mục đích làm giảm khó khăn cho HS khi họ lĩnh hội khái niệm này. Nhưng quan điểm này hình thành nghĩa đúng của khái niệm giới hạn và rõ ràng giúp cho HS hiểu rõ bản chất của nó là điều vô cùng cần thiết. Một trong những cơ hội để HS có thể hiểu rõ hơn về khái niệm theo quan điểm này là giáo viên (GV) ủy thác cho học sinh giải quyết các tình huống thực tế, từ đó HS khám phá ra nét hoàn toàn tương đồng của ý nghĩa bài toán thực tế với định nghĩa giới hạn bằng ngôn ngữ ε,δ. Để giải quyết các vấn đề thực tế, HS phải trải qua quá trình mô hình hóa toán học – quá trình chuyển vấn đề thuộc lĩnh vực ngoài toán học thành vấn đề của toán học, rồi sử dụng các công cụ toán để tìm câu trả lời cho vấn đề được đặt ra ban đầu. Trong bài viết, việc bổ sung ý nghĩa còn thiếu về khái niệm giới hạn theo ngôn ngữ ε, δ cho HS thông qua quá trình mô hình hóa toán học được đề cập.

2 NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

2.1 Quá trình mô hình hóa toán học

Theo tác giả Lê Thị Hoài Châu (2014), "Mô hình hóa toán học là sự giải thích bằng toán học cho một hệ thống ngoài toán học với những câu hỏi xác định mà người ta đặt ra trên hệ thống này. Quá trình mô hình hóa toán học là quá trình thiết lập một mô hình toán học cho vấn đề ngoài toán học, giải quyết vấn đề trong mô hình đó, rồi thể hiện và đánh giá lời giải trong ngữ cảnh thực tế, cải tiến mô hình nếu cách giải quyết không thể chấp nhận".

Phỏng theo Stewart (2012), sơ đồ tóm lược các bước của quá trình mô hình hóa như sau:



Sơ đồ: Quá trình mô hình hóa

Bốn bước của quá trình mô hình hóa cụ thể như sau:

Bước 1. Lập một mô hình toán học bằng cách xác định và đặt tên cho các biến số, có thể đưa ra các giả định nhằm làm đơn giản hóa hiện tượng để áp dụng toán học một cách dễ dàng.

Bước 2. Áp dụng kiến thức toán học vào mô hình vừa được xây dựng nên để đưa ra các kết luận về toán học.

Bước 3. Vận dụng các kết luận toán học và giải thích chúng trong mối liên hệ với hiện thực ở thế giới thực bằng cách đưa ra sự giải thích và những dự báo.

Bước 4. Kiểm tra lại các dự báo, sự giải thích thông qua việc kiểm tra lại các dữ liệu thực tế. Nếu chúng không phù hợp với thực tế thì cần sửa đổi mô hình hoặc xây dựng mô hình mới và bắt đầu quy trình lại một lần nữa.

2.2 Những quan điểm về khái niệm giới hạn trong lịch sử

Nói về những quan điểm về khái niệm giới hạn trong lịch sử, Lê Thái Bảo Thiên Trung (2011) nhận định:

Quan điểm đầu tiên về khái niệm giới hạn tồn tại từ thời Euclide (tư tưởng của nó thể hiện trong Phương pháp vét cạn) đến tận Newton (1642–1727). Lê Thái Bảo Thiên Trung gọi đây là quan điểm " xấp xỉ x ". Trong quan điểm này, biến số "kéo" hàm số:

Nếu một đại lượng x tiến về một giá trị a của đại lượng này (theo nghĩa, nó nhận các giá trị ngày càng gần a) thì đại lượng y – đại lượng phụ thuộc x (một hàm số biến x)- tiến về một giá trị L. Nghĩa là x càng lúc càng gần a kéo theo y càng lúc càng gần L.

Quan điểm thứ hai về khái niệm giới hạn xuất hiện khi Cauchy (1821) đưa ra định nghĩa chính xác cho khái niệm này. Lê Thái Bảo Thiên Trung gọi đây là quan điểm " xấp xỉ $f(x)$ ".

Trong quan điểm " xấp xỉ $f(x)$ " chúng ta hiểu khái niệm giới hạn (thể hiện trong kí hiệu hiện đại ngày nay $\lim_{x\to a} f(x)=L$) có nghĩa là độ xấp xỉ của $f(x)$ với L mà ta mong muốn sẽ quyết định độ xấp xỉ của x với a cần chọn.

Quan điểm thứ hai đã hình thành nghĩa đúng của khái niệm giới hạn. Năm 1876, Weierstrass đã thể hiện quan điểm " xấp xỉ $f(x)$ " của khái niệm giới hạn bằng ngôn ngữ ε, δ (Lê Thái Bảo Thiên Trung, 2011). Định nghĩa súc tích này vẫn được sử dụng ở bậc đại học ngày nay. Với ngôn ngữ hình thức, người ta có thể trình bày khái niệm giới hạn như sau:

$$\lim_{x\to a} f(x)=L \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0: |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon)$$

Hai quan điểm kể trên thể hiện sự đối lập nhau về vai trò của độ xấp xỉ biến δ và độ xấp xỉ giá trị hàm số ε : trong quan điểm " xấp xỉ x ", độ xấp xỉ δ kéo theo độ xấp xỉ ε ; còn trong quan điểm "xấp xỉ $f(x)$ ", độ xấp xỉ ε mong muốn sẽ quyết định độ xấp xỉ δ.

2.3 Xây dựng một kịch bản dạy học định nghĩa chính xác của khái niệm giới hạn thông qua quá trình mô hình hóa toán học

Trong phần này, một kịch bản dạy học định nghĩa chính xác về giới hạn của hàm số với mục đích giảm bớt khó khăn cho HS khi lĩnh hội khái niệm trừu tượng này được giới thiệu. Đối với các tình huống trong kịch bản, một số câu trả lời của HS và trình bày các chiến lược mong đợi cho các tình huống được dự kiến.

2.3.1 Khung lí thuyết tham chiếu

Các công cụ của lí thuyết tình huống do Brousseau (1998) đặt nền móng được vận dụng để xây dựng kịch bản dạy học. Lí thuyết này đã được trình bày trong cuốn giáo trình song ngữ Việt – Pháp của Bessot và các cộng sự (2009). Mục tiêu của lí thuyết tình huống là nghiên cứu những điều kiện tốt nhất cho phép người học lĩnh hội thực sự tri thức cần dạy. Để làm điều này, nhà nghiên cứu cần phải xây dựng những tình huống dạy học mà ở đó người học thực sự cần đến tri thức nhắm đến (chẳng hạn khái niệm giới hạn) để giải quyết vấn đề. Một (hay nhiều) ý nghĩa của tri thức sẽ được người học kiến tạo khi họ tìm cách giải quyết vấn đề trong tình huống.

2.3.2 Dàn dựng kịch bản

Kịch bản có thể tiến hành dạy học trong một buổi (70 phút, làm việc theo nhóm) trên đối tượng là các em HS lớp 11 hoặc các em HS lớp 12 trung học phổ thông đã học xong khái niệm giới hạn của hàm số.

Hoạt động 1: (30 phút, làm việc theo nhóm và tập thể). Mục đích xây dựng định nghĩa chính xác về giới hạn của hàm số.

Hoạt động 2: (10 phút, làm việc theo nhóm). Mục đích kích thích tính tò mò, tạo sự quan tâm đến tình huống và gợi lên ý niệm về sự xấp xỉ cho HS trong tình huống thực tế.

Hoạt động 3: (30 phút, làm việc theo nhóm). Mục đích làm rõ ràng hơn cho HS về sự thể hiện của quan điểm " xấp xỉ $f(x)$" của khái niệm giới hạn trong tình huống thực tế.

2.3.3 Nội dung kịch bản

Hoạt động 1: (30 phút, làm việc theo nhóm và tập thể).

GV bắt đầu hoạt động 1 bằng cách phát phiếu học tập có tình huống 1 kèm theo câu hỏi cho các nhóm, yêu cầu HS thảo luận và điền câu trả lời vào phiếu học tập.

Tình huống 1. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}4x-5 \text{ nếu } x\neq 3\\ 10 \quad \text{nếu } x=3\end{cases}$

a) Tính $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$?

b) Nếu $f(x)$ cách 7 một khoảng nhỏ hơn $0,1$ thì x nằm cách 3 một khoảng bao nhiêu?

c) Làm lại câu (b) với $f(x)$ nằm cách 7 một khoảng nhỏ hơn $0,01$. Còn $f(x)$ nằm cách 7 một khoảng nhỏ hơn $0,001$ thì sao?

d) Hãy đưa ra một phát biểu tổng quát cho các trường hợp trên.

Các nhóm thảo luận và trả lời vào phiếu học tập các câu hỏi tình huống do GV đặt ra. GV quan sát HS thảo luận, có thể đặt câu hỏi gợi mở cho HS nếu cần. Sau đó, GV thu các phiếu học tập của các nhóm và chọn phiếu học tập của một vài nhóm để trình chiếu lên bảng. GV và HS cùng phân tích và nhận xét. Cuối cùng, GV trình bày bài giải mong đợi của các câu hỏi lên bảng.

Tình huống 1. (Lời giải mong đợi từ HS)

a) Khi x dần đến 3 nhưng $x\neq 3$ thì $f(x)$ dần đến 7, vì thế $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=7$.

b) Khoảng cách từ x đến 3 là $|x-3|$ và khoảng cách từ $f(x)$ đến 7 là $|f(x)-7|$, vậy yêu cầu của bài toán là tìm một số δ sao cho:

$|f(x)-7|<0,1$ nếu $|x-3|<\delta$ nhưng $x\neq 3$

Nếu $|x-3|>0$, thì $x\neq 3$, do đó dạng tương đương của bài toán là cần tìm một số δ sao cho

$|f(x)-7|<0,1$ nếu $0<|x-3|<\delta$

Vì $|f(x)-7|<0,1$ nên $|4x-5-7|<0,1$. Điều này tương đương với $|x-3|<\frac{0,1}{4}$.

Do đó, đáp án cho bài toán trên là $\delta=\frac{0,1}{4}$; tức là nếu x nằm cách 3 một khoảng nhỏ hơn $\frac{0,1}{4}$ thì $f(x)$ sẽ nằm cách 7 một khoảng nhỏ hơn $0,1$.

c) Nếu thay đổi con số $0,1$ trong bài toán trên thành một số nhỏ hơn là $0,01$, thì cũng với phương pháp như trên, $f(x)$ sẽ sai khác 7 một khoảng nhỏ hơn $0{,}01$ với điều kiện x sai khác 3 một số nhỏ hơn $\frac{0{,}01}{4}$:

$$\left|f(x)-7\right|<0{,}01 \text{ nếu } 0<\left|x-3\right|<\frac{0{,}01}{4}$$

Tương tự như vậy,

$$\left|f(x)-7\right|<0{,}001 \text{ nếu } 0<\left|x-3\right|<\frac{0{,}001}{4}$$

d) Số $0{,}1$ trong câu (b), các số $0{,}01$ và $0{,}001$ trong câu (c) chính là sai số có thể cho phép. Vì 7 chính là giới hạn chính xác của $f(x)$ khi x dần đến 3 nên có thể cho phép sự chênh lệch giữa $f(x)$ và 7 thấp hơn một trong ba con số này; và cũng có thể cho nó thấp hơn bất kì một số dương nào khác. Nếu kí hiệu ε cho một số dương bất kì, thế thì

$$\left|f(x)-7\right|<\varepsilon \text{ nếu } 0<\left|x-3\right|<\frac{\varepsilon}{4} \quad (*)$$

Tiếp theo, GV nhận xét:

Đây cũng là một cách phát biểu chính xác rằng $f(x)$ dần đến 7 khi x dần đến 3. Thật vậy, đẳng thức $(*)$ cho thấy giá trị của $f(x)$ có thể chọn nằm cách 7 một khoảng tùy ý ε bằng cách cho x nhận các giá trị cách 3 một khoảng nhỏ hơn $\frac{\varepsilon}{4}$ nhưng $x\neq 3$.

Cuối cùng, GV gợi mở để HS phát biểu một định nghĩa chính xác về giới hạn qua ngôn ngữ ε,δ bằng các sử dụng (*) như một mô hình. Định nghĩa được phát biểu như sau:

Cho f là hàm số xác định trên khoảng mở có chứa a, có thể không xác định tại a. Ta nói rằng giới hạn của $f(x)$ khi x dần đến a là L, và ta viết:

$$\lim_{x\to a} f(x)=L$$

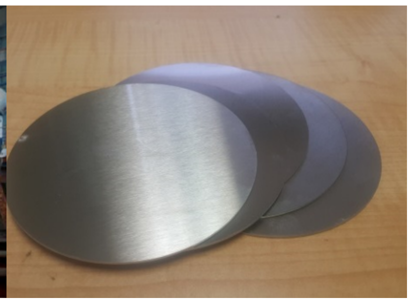
nếu với mỗi số $\varepsilon>0$ có một số $\delta>0$ sao cho

nếu $0<\left|x-a\right|<\delta$ thì $\left|f(x)-L\right|<\varepsilon$.

Tiếp theo, một số hoạt động dạy và học xuất phát từ tình huống thực tiễn được xây dựng nhằm làm rõ ràng hơn cho HS về quan điểm " xấp xỉ $f(x)$" của khái niệm giới hạn. Tình huống thực tế được lựa chọn dưới đây với ngữ cảnh khá quen thuộc để HS có thể hiểu rõ tình huống và có khả năng tìm ra mô hình toán phù hợp.

Hoạt động 2: (10 phút, làm việc theo nhóm).

Tình huống 2. Các em hãy quan sát hai bức ảnh bên dưới và trả lời các câu hỏi sau:

Câu hỏi 1: Các em thấy những gì? Các em quan tâm đến điều gì?

Câu hỏi 2: Các em có liên hệ đến các kiến thức toán học nào đã biết không? Kiến thức toán học đó là gì?

Mỗi HS sẽ có được những câu trả lời riêng cho mình và sẽ có hàng loạt các ý kiến, các tranh luận về hai bức ảnh đã được đưa ra chẳng hạn: về những người thợ cơ khí đang làm việc, những miếng kim loại hình tròn, chi phí sản xuất vật liệu,… Những kiến thức toán học nhắc đến là: hình tròn, diện tích, bán kính.

Câu hỏi 3: Nếu yêu cầu phải làm ra nhiều miếng kim loại hình tròn có diện tích **chính xác tuyệt đối** là $1000\ cm^2$, người thợ cơ khí có chắc chắn thực hiện được không? Vì sao?

Với câu hỏi này, GV và HS sẽ đi đến tổng kết như sau:

"Không thể đo được chính xác diện tích một hình tròn vì trong công thức tính diện tích hình tròn có chứa số vô tỉ là π. Do đó, người thợ cơ khí khó chắc chắn sẽ làm được những miếng kim loại hình tròn có diện tích chính xác tuyệt đối là $1000\ cm^2$".

Câu hỏi 4: Nếu yêu cầu phải làm ra nhiều miếng kim loại hình tròn có diện tích là $1000\ cm^2$, sau khi người thợ làm xong, em có nhận xét gì về diện tích của các miếng kim loại đó với diện tích chuẩn 1000 cm^2.

Bằng cách tận dụng kết luận của câu hỏi 3, HS có thể đưa ra nhận xét rằng diện tích của các miếng kim loại sau khi được người thợ làm xong sẽ sai khác một con số rất nhỏ và luôn gần bằng với diện tích 1000 cm^2. Từ đó, HS bắt đầu hình thành những ý niệm về sự xấp xỉ trong tình huống thực tế vừa nêu.

Hoạt động 3: (30 phút, làm việc theo nhóm).

GV đưa ra tình huống 3 bằng cách phát phiếu học tập cho các nhóm. GV yêu cầu HS thảo luận và điền câu trả lời vào phiếu học tập.

Tình huống 3. Một thợ cơ khí được yêu cầu làm ra một miếng kim loại hình tròn có diện tích là 1000 cm^2.

a) Bán kính của miếng kim loại là bao nhiêu?

b) Nếu sai số cho phép đối với diện tích miếng kim loại là ± 5 cm^2 thì người thợ máy phải kiểm soát sai số đối với bán kính miếng kim loại trong phạm vi bao nhiêu?

c) Làm lại câu (b) với sai số cho phép đối với diện tích miếng kim loại là ± 3 cm^2.

d) Em có nhận xét gì về mối quan hệ giữa sai số đối với diện tích và sai số đối với bán kính?

e) Trong câu (b), xét về định nghĩa ε,δ của $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ thì x là gì? $f(x)$ là gì? a là gì? L là gì? Giá trị ε được cho là bao nhiêu? Giá trị tương ứng của δ là bao nhiêu?

Các nhóm thảo luận và trả lời vào phiếu học tập các câu hỏi do GV đặt ra. Tiếp theo, GV thu các phiếu học tập của các nhóm. Sau đó, GV chọn phiếu học tập của một vài nhóm và cùng HS phân tích và nhận xét. Cuối cùng, GV trình bày bài giải mong đợi của các câu hỏi lên bảng.

Để giải các câu (a), (b) và (c) của bài toán này, HS thường phải trải qua 4 bước của quá trình mô hình hóa toán học nhưng đôi lúc các em không nhận ra. Quá trình sẽ diễn ra như sau:

Bước 1. Lập ra một mô hình toán học

Gọi S và R lần lượt là diện tích và bán kính của miếng kim loại hình tròn. Do đó, $S=\pi R^2$.

Bước 2. Giải bài toán

Bán kính chuẩn là $R=\sqrt{\dfrac{1000}{\pi}}\approx 17{,}841\ cm.$

Vì sai số cho phép đối với diện tích miếng kim loại là ± 5 cm^2 nên ta có $995<\pi R^2<1005$.

Khi đó: $R_{\min}=\sqrt{\dfrac{995}{\pi}}\approx 17{,}797\ cm.$

$R_{\max}=\sqrt{\dfrac{1005}{\pi}}\approx 17{,}886\ cm.$

Độ sai lệch với bán kính chuẩn là:

$|17{,}841-17{,}797|=0{,}044\ cm;$

$|17{,}841-17{,}886|=0{,}045\ cm.$

Bước 3. Đưa ra sự giải thích cho tình huống thực tế

Để chắc chắn rằng giá trị của diện tích sẽ nằm trong đoạn $\left[995;1005\right]$, sai số cho phép đối với bán kính được chọn phải là giá trị nhỏ nhất trong hai giá trị $0{,}044$ và $0{,}045$. Do đó, sai số cho phép đối với bán kính là xấp xỉ $0{,}044$ cm.

Bước 4. Kiểm nghiệm lại các dự báo, sự giải thích và mô hình toán học đã xây dựng

Mô hình toán học được đưa ra là hoàn toàn phù hợp với giả thiết của bài toán. HS chỉ cần kiểm tra lại các bước tính toán cho đúng là có thể hoàn thành lời giải các câu (a) và (b).

Đối với câu hỏi (c), HS chỉ cần thực hiện lại tương tự các bước giải của câu (b). Điều này nhằm tạo điều kiện để HS có thể đưa ra câu trả lời cho câu (d). Lời giải mong đợi của câu (d) như sau:

Nếu sai số đối với diện tích càng lớn thì sai số đối với bán kính cũng càng lớn và ngược lại; điều này nhằm dẫn đến một kết luận là “ *sai số đối với diện tích sẽ quyết định sai số đối với bán kính* ” hay có thể nói theo một cách khác “ *độ xấp xỉ của diện tích đang thiết kế với diện tích chuẩn* $1000\ cm^2$ *sẽ quyết định độ xấp xỉ của bán kính đang thiết kế với bán kính chuẩn* $\sqrt{\dfrac{1000}{\pi}}\ cm$ ”.

Cuối cùng, yêu cầu trong câu (e) với mục đích chỉ rõ cho học sinh sự thể hiện của định nghĩa chính xác về giới hạn trong thực tế. Lời giải mong đợi của câu (e) như sau:

Đặt x là bán kính, $f(x)$ là diện tích, a là bán kính chuẩn, L có giá trị là $1000\ cm^2$. Người thợ cơ khí không thể nào cắt được một miếng kim loại có diện tích chính xác là $1000\ cm^2$. Tuy nhiên, người thợ cơ khí muốn mức độ sai lệch về diện tích không được lớn hơn $\varepsilon=5$ cm^2. Do đó, người thợ cơ khí phải cắt miếng kim loại với bán kính chỉ sai lệch với bán kính chuẩn không quá giá trị $\delta\approx 0,044$ cm.

3 KẾT LUẬN

Bản chất của khái niệm giới hạn được lột tả một cách sâu sắc dưới sự phản ánh của thực tế. Những chướng ngại tri thức luận của HS khi lĩnh hội khái niệm tinh tế này phần nào được giảm đi đáng kể. Hơn thế, khái niệm giới hạn cũng phản ánh lại thế giới hiện thực. Chính điều này, HS hiểu sâu hơn mối liên hệ chặt chẽ giữa khái niệm này và rộng hơn là giữa các kiến thức toán học khác với thực tiễn cuộc sống. Ngoài ra, thông qua quá trình mô hình hóa toán học, một số hoạt động dạy và học các khái niệm khác chẳng hạn như: đạo hàm, tích phân, … hoàn toàn có thể được xây dựng với mục đích giúp cho HS phát triển khả năng nhận thức tri thức toán học ở mức độ cao hơn và nâng cao các kĩ năng giải quyết các vấn đề thực tiễn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Bessot, A., Comiti, C., Lê Thị Hoài Châu, Lê Văn Tiến, 2009. Những yếu tố cơ bản của Didactic Toán (Éléments fondamentaux de didactique des mathématiques) - Sách song ngữ Việt-Pháp. Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh, 421 trang.

Brousseau G, 1998. La théorie des situations didactiques. La pensée Sauvage. Grenoble, 395 pages.

Lê Thị Hoài Châu, 2014. Mô hình hóa trong dạy học khái niệm đạo hàm. Tạp chí Khoa học Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh. 65: 5 – 18.

Stewart J, 2012. Caculus: Early Transcendentals, Senventh Edition. Cengage Learning, 1194 pages.

Lê Thái Bảo Thiên Trung, 2011. Dạy và học khái niệm giới hạn hàm số ở trường trung học phổ thông. Tạp chí Khoa học Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh. 27: 62 – 67.